1. Distribución de probabilidad de Poisson

Definición: Se dice que una variable aleatoria Y tiene una distribución de probabilidades de Poisson si y solo si

$$p(y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}$$

para $y = 0, 1, 2, ...$ y $\lambda > 0$.

Teorema: Si Y es una variable aleatoria con distribución de Poisson con parámetro λ, entonces

$$\mu = \lambda \text{ y } \sigma^2 = \lambda.$$

Ejemplo. La probabilidad de que un ratón vacunado contraiga cierta enfermedad es 0.2. Mediante la distribución de Poisson calcule la probabilidad de que a lo más 3 de 30 ratones sean inoculados con la enfermedad.

Solución.
La primera cosa importante es que el parámetro λ de la distribución de Poisson es usualmente un promedio. En este ejemplo este parámetro viene dado de multiplicar la cantidad de ratones en el experimento por la probabilidad de que contraigan la enfermedad, noten que eso nos daría la cantidad de ratones que deberían estar enfermos, lo cual tiene sentido, ya que el parámetro también es la media de la distribución. Como $\lambda = 0{,}2 \times 30 = 6$, entonces

$$P(Y \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = e^{-6}\left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!}\right) = 61e^{-6}.$$

Ejemplo. El número de defectos Y por pie en la producción diaria de cierto tipo de cuerda tiene distribución de Poisson con media $\lambda = 2$. La utilidad por pie que se obtienen al venderla está representada por X, donde $X = 50 - 2Y - Y^2$. Calcule la utilidad esperada por pie.

Solución.
Es claro que lo que nos piden es $E[X]$. Por propiedades del valor esperado tenemos

$$E[X] = E[50 - 2Y - Y^2] = 50 - 2E[Y] - E[Y^2] = \clubsuit$$

Sabemos que por Y tener distribución de Poisson se cumple que $\lambda = \mu = \sigma^2 = 2$. Para conseguir $E[Y^2]$ utilicemos el teorema que dice $V(Y) = E[Y^2] - \mu^2$. De ahí sigue

$$V(Y) = E[Y^2] - \mu^2 \Rightarrow E[Y^2] = V(Y) + \mu^2 = 2 + 2^2 = 6.$$

Por lo tanto

$$E[X] = \clubsuit = 50 - 2 \times 2 - 6 = 40.$$